

Calcolo numerico 2 con laboratorio

Prof. Marco Caliari

Verona, 15 febbraio 2023

Inviare un unico file, ottenuto comprimendo una cartella dal nome uguale al proprio numero di matricola e contenente tutti i file necessari ad eseguire gli script `main1.m`, ..., `main6.m`, uno per ogni punto del testo, all'indirizzo email `marco.caliari@univr.it`. File difformi da queste indicazioni comporteranno l'annullamento del compito. Qualunque riga di codice o commento non pertinente sarà valutato negativamente. Questo foglio va compilato e riconsegnato. Chi intende ritirarsi mandi comunque un'email comunicando la propria intenzione.
Numero di matricola _____

1. Si determini il numero minimo di iterazioni del metodo di Jacobi per risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 6.3 & 8 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \\ 25 \end{bmatrix}$$

in modo che l'errore relativo in norma euclidea rispetto ad una soluzione di riferimento sia inferiore a 10^{-3} .

2. Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si usi la decomposizione SVD per trovare una soluzione che minimizza il residuo in norma euclidea e una soluzione, diversa dalla precedente, di norma euclidea minima che minimizza il residuo in norma euclidea.

3. Il primo passo del metodo punto medio implicito per la risoluzione del modello SIR

$$\begin{cases} S'(t) = -\frac{r}{100}S(t)I(t) \\ I'(t) = \frac{r}{100}S(t)I(t) - 2I(t) \\ R'(t) = 2I(t) \end{cases}$$

richiede di risolvere il sistema non lineare

$$\begin{cases} S_1 = S_0 - k \frac{r}{100} \frac{S_0 + S_1}{2} \frac{I_0 + I_1}{2} \\ I_1 = I_0 + k \left(\frac{r}{100} \frac{S_0 + S_1}{2} \frac{I_0 + I_1}{2} - 2 \frac{I_0 + I_1}{2} \right) \\ R_1 = R_0 + k 2 \frac{I_0 + I_1}{2} \end{cases}$$

Lo si applichi per trovare $[S_1, I_1, R_1]^T$ a partire da $[S_0, I_0, R_0]^T = [99, 1, 0]^T$ con il parametro $r = 10$ e un passo temporale $k = 0.1$.

4. Detta M la matrice del sistema lineare del primo esercizio e A la matrice del sistema lineare del secondo esercizio, si usi il metodo delle potenze per calcolare l'autovalore più piccolo in modulo di $(M - A/2)^{-1}(M + A/2)$, senza calcolare esplicitamente $(M - A/2)^{-1}$, con almeno tre cifre significative corrette.
5. Data la spline cubica not-a-knot che interpola la funzione $y = \cos(x)$ in 6 punti equispaziati tra 0 e $\pi/2$, si calcoli il valore della sua derivata terza nel punto $x = \pi/4$.
6. Si calcoli l'area della regione del piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = -\frac{x^4 + 3}{\sqrt{3 - x^2}}$$

e le rette $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ e $y = 0$ con almeno tre cifre significative corrette usando un'opportuna formula gaussiana. È possibile calcolare il valore esatto? Se sì, con quanti nodi di quadratura?